数理解析研究所講究録
第877巻1994年87-100

ON UNIVERSAL COVERING OF ALGEBRAS

佐藤真久(MASAHISA SATO)

ABSTRACT. Let R be an algebra over algebraically closed field. We assume that R is of finite representation type. In this report, we show the construction of a universal Galois covering of an algebra and give generators of a Galois group in terms of walks of a quiver concretely. The attempt to get a universal Galois covering was tried for algebras whose quivers have no oriented cycles. But there is no theories for algeras whose quivers have oriented cycles. The outline of the theory stdying a universal Galois covering of an algebra will be stated in this report. We will know that generators of a Galois group corresspond to some homotopies we give on a quive of an algebra with relations. Our main concern is how to define such homotopy relations that determine these generators as homotopies.

1. Auslander-Reiten quiver の普遍被覆

ここでは多元環 R とは代数閉体 K 上の有限次元多元環をさし、さらに有限表現型と仮定する。即ち、直既約 R-加群の同型類は有限個である。また、Γ を R の Auslander-Reiten クイバー、τ をその translation とする。

ガロワ被覆の概念はもともとは [2, 3] 等の論文で、多元環の Auslander-Reiten クイバー上で定義された。これは複雑な多元環の Auslander-Reiten クイバーに対し、単連結と呼ばれる直既約加群が特定のアルゴリズムで計算可能な多元環の Auslander-Reiten クイバーを位相幾何学的な被覆を構成することで作り上げ、互いの直既約加群がガロワ群のオービットの違いを除いて1対1に対応していることを示したものである。

しかし、一般には Auslander-Reiten クイバーが先に与えられることは希で、通常は多

元環が与えられてから Auslander-Reiten クイバーが求まることを勘案すれば、与えられた多元環から Auslander-Reiten クイバーを経由せず直接単連結な多元環を構成できれば都合がよいことが理解されよう。従って、ここではこの構成法を述べるのであるが、もともとの考え方を応用するので[2] にある Auslander-Reiten クイバー上での普遍被覆の構成法を述べておく。

1.1. ホモトピー. Γ の矢 $\alpha : a \to b$ に対し形式的に $\alpha^{-1} : b \to a$ を考える。Γ の walk とは、径路 $\alpha_1 \dots \alpha_n$ （α_i あるいはα_i^{-1} が矢）をさす。walk 全体に対し次のようなホモトピー関係 $\underset{H}{\sim}$ を導入する。

(1) $\alpha : y \to z$ が Γ の矢なら$\alpha^{-1}\alpha \underset{H}{\sim} 1_y$, $\alpha^{-1}\alpha \underset{H}{\sim} 1_z$。

(2) Γ の射影的でない点 y に対し Auslander-Reiten 列を

$$\begin{tikzcd} & y_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ \tau \mathrm{y} \arrow[ur, "\sigma\alpha_1"] \arrow[dr, "\sigma\alpha_n"'] & \vdots & \mathrm{y} \\ & y_n \arrow[ur, "\alpha_n"'] & \end{tikzcd}$$

とするとき、任意の $i, j (1 \leq i, j \leq n)$ に対して

$$\alpha_i \cdot \sigma\alpha_i \underset{H}{\sim} \alpha_j \cdot \sigma\alpha_j,\ (\sigma\alpha_i)^{-1} \cdot \alpha_i^{-1} \underset{H}{\sim} (\sigma\alpha_j)^{-1} \cdot \alpha_j^{-1}.$$

(3) $v \underset{H}{\sim} v'$ とするとき、合成可能なものに対し $wv \underset{H}{\sim} wv', vu \underset{H}{\sim} v'u.$

Γ の一点 x を固定し、x から x への walk のホモトピークラスの集合$\prod(\Gamma, x)$ を考える。$\prod(\Gamma, x)$ は walk の合成を積として群をなす。これを基本群と呼ぶ。

1.2. 普遍被覆. Γ の普遍被覆 $\tilde{\Gamma}$ は、Γ の一点 x を固定して以下のように構成される。

(1) **点:** $\tilde{\Gamma}$ の点は x からのホモトピーである。

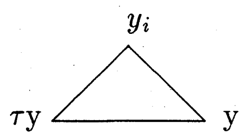
(2) $\tilde{\Gamma}$ **の矢：** $w : x \to \cdots \to y$ を walk とし、$[w]$ を w の属するホモトピークラスとする。また $\alpha : y \to z$ を Γ の矢とする。$(\alpha, [w])$ を $[w]$ から $[\alpha w]$ の矢 $[w] \to [\alpha w]$ と決める。

(3) **Translation** $\tau : w : x \to \cdots \to y$ を walk とする。y が射影的なら $[w]$ は射影的。y が射影的でないなら $\tau[w] = [(\sigma\alpha)^{-1}\alpha^{-1}w]$ と決める。ただし $\sigma\alpha, \alpha$ は Auslander-Reiten 列に出てきた矢である。

(4) $\prod(\Gamma, \mathbf{x})$ **の** $\tilde{\Gamma}$ **への作用:** g を walk $u : x \to \cdots \to x$ のホモトピークラスとする。$w^g = [wu]$ と決める。

(5) **被覆関手:** 普遍被覆 $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ は walk $u : x \to \cdots \to y$ とΓ の矢 $\alpha : y \to z$ に対し $\pi([w]) = y, \pi(\alpha, [w]) = \alpha$ と決める。これによって π はクイバー写像となる。

(6) **図形表示:** Auslander-Reiten クイバーΓの点、線分およびA-R列に対応して作られる



右の三角形 (内部も含む) からなる図形を $|\Gamma|$ とする。この図形のホモトピー群を$\prod(|\Gamma|, x)$ とする。このとき、群同型$\prod(|\Gamma|, x) \cong \prod(\Gamma, x)$ が成立する。

2. 状況説明

Auslander-Reiten クイバーの被覆理論は有用であるが、実際に直既約表現を求めようとする場合、多元環あるいは多元環のクイバーと関係式が与えられ、これから Auslander-Reiten クイバーを計算することが必要である。従って、多元環のクイバーに対して単連結な多元環が普遍被覆と共に直接構成できるような、多元環と関係式の被覆理論が出来上

がれば有益であろう。そこで、この報告集では多元環の普遍被覆の一般的構成法を解説していく。

現在まで、この試みは[4, 5] に見られるようにΓが閉径路 (oriented cycle) を持ってない場合しか考察されてない。次の例で見られるように、ループなどの閉径路がある場合は同じクイバーが関係式との「相互作用」で被覆になったりならなかったりする。たとえ被覆であっても同じクイバーが普遍的であったりなかったりと複雑な様相を呈してくる。

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 1 \arrow[l, shift right, "\alpha"'] \arrow[loop below, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

これに対し次の３つのクイバーを考える。

(1)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[loop below, "\gamma"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[loop below, "\gamma"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[loop below, "\gamma"] & \cdots \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, shift left, "\beta"] & 2 \arrow[d, shift left, "\beta"] & 2 \arrow[d, shift left, "\beta"] & 2 \arrow[d, shift left, "\beta"] & \\ \cdots & 1 \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & 1 \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & 1 \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & 1 \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \cdots \end{tikzcd}$$

(3)

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & & & & & \\
1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & 3 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & 4 \arrow[d, "\beta"'] & & & \\
2 \arrow[r, "\beta"] & 5 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & 7 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & 8 \arrow[d, "\beta"'] & & \\
& 6 \arrow[r, "\beta"] & 9 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & 11 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & 12 \arrow[d, "\beta"'] & \\
& & 10 \arrow[r, "\beta"] & 13 \arrow[r, "\gamma"] & 15 & \\
& & & & & \ddots
\end{tikzcd}
$$

(i) Q の関係式が$\gamma^2 = \alpha\beta = \beta\alpha = 0$ とすると (1),(2),(3) はすべて Q の被覆になっている。この場合 (3) は普遍被覆でない。

(ii) $\gamma^2 = \alpha\beta,\ \gamma^4 = 0$ が Q の関係式である場合は (1),(2) は被覆になってない。(3) は普遍被覆になっている。

Auslander-Reiten クイバーの場合、関係式が mesh-relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sigma\alpha_i = 0$ に固定されている。従ってこの関係式に対し[2] では普遍被覆を構成したと考えることができる。

3. 多元環の普遍被覆

多元環が有限表現型であることから、次の事実をここでは利用する。

代数閉体 K 上の有限次多元環 Rとその根基を $J = \mathrm{Rad}(R)$ とすると次のことが成立する。

(1) e, fを Rの直既約な直交巾等元とすると、ある元$\alpha \in eRf$があり $eJf = eRe \cdot \alpha$あるいは $eJf = \alpha \cdot fRf$となる。

(2) Rはベクトル空間として乗法的な基底 (multiplicative basis) を持つ。即ち $n = \dim_K R$として、ある基底 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ で任意の$\alpha_i, \alpha_j (1 \le i, j \le n)$ に対し$\alpha_i \alpha_j = 0$ あるいは$\alpha_i \alpha_j \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ となるものがある。

いくつかの段階に分けて被覆を構成する方法とその手法を解説する。

3.1. 逐次構成法. 1つのガロワ被覆 $F : K\overline{Q}/\overline{I} \to KQ/I$が与えられたとする。一般に$\overline{Q}$は無限クイバーであるので、$K\overline{Q}/\overline{I}$の被覆を有限クイバーの場合と同じように扱うには無理がある。そこでこれを何らかの有限クイバーに置き換えて被覆を構成し、そのガロワ被覆 $F : K\tilde{Q}/\tilde{I} \to KQ/I$が Fを通過するようにする方法を考察する。

G をガロワ被覆 Fのガロワ群とする。Q_1を$\overline{Q}$の部分クイバーで十分大きいものとする。十分大きいとは次の条件を満たしているとする。

(1) $F(Q_1) = Q$

(2) I_1を$\overline{I}$から自然に導かれる関係式、即ち $I_1 = \ker(KQ_1 \hookrightarrow K\overline{Q} \to K\overline{Q}/\overline{I})$ とする。このとき、任意の直既約 KQ/I-加群 Mに対し直既約 KQ_1/I_1-加群 M_1があり $F(M_1) = M$となる。

$F_1 : K\overline{Q_1}/\overline{I_1} \to KQ_1/I_1$を KQ_1/I_1のガロワ群 G_1を持つガロワ被覆とする。Fのガロワ群 G を用いて $G \cdot Q_1 = \overline{Q}$であることに注意すると G によってクイバー準同型$\overline{F_1} : K\bar{\overline{Q}}/\bar{\overline{I}} \to K\overline{Q}/\overline{I}$ が G-orbit を図形の変換と考えて定義できる。(正確には G の元 gとして、$F_1^g : K(g\overline{Q_1})/g(\overline{I_1}) \to K(gQ_1)/Kg(I_1)$ を定義して $\bigcup_{g \in G} g\overline{Q_1}$として定義される。この $\cup$ はより正確には $\{K(g\overline{Q_1})/g(\overline{I_1}) \xrightarrow{F_1^g} K(gQ_1)/Kg(I_1) \hookrightarrow K\overline{Q}/\overline{I} \mid g \in G\}$ の amalgamated sum である。

$F\overline{F_1}: K\bar{\bar{Q}}/\bar{\bar{I}} \to K\overline{Q}/\overline{I} \to KQ/I$ が再びガロワ被覆を与え、ガロワ群は G と G_1から生成される群である。

3.2. 閉径路の消去法. Rを代数閉体K上の有限次元多元環で有限表現型で乗法的基底を選び、それに関するクイバーと関係式を各々Q, Iとおく。ここで、関係式と関係式が生成するイデアルは同じ記号を用い、多元環と径路多元環の商KQ/Iは同じもの、即ち$R = KQ/I$と考える。

この節では「閉径路の生成元」ともいうべき概念を定義する。

被覆を作るとき$\underset{\alpha\circlearrowright}{1\cdot} \xrightarrow{\beta} \underset{\circlearrowright\gamma}{\cdot 2}$で$\alpha\beta = \gamma\beta, \alpha^2 = \gamma^2 = 0$ を関係式に持つクイバーに対しては、ループαが異なる点の間の矢として持ち上げられている被覆(これを「ループαを解消した被覆」と呼ぶ) では自然にγも異なる点の間の矢となっている。

一方、$\alpha\beta = \gamma\beta = \alpha^2 = \gamma^2 = 0$ と関係式が与えられているときは、ループαを解消した被覆でループγがループのまま持ち上げられた被覆が存在する。

従って、「閉径路の生成元」なるものは関係式に依存して決まってくる。

定義 3.1. (1) 2つの閉径路 u, vが **uni-equivalent** とは、ある閉径路の列 $u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ で各 u_iと u_{i+1} $(i = 1, \ldots, n-1)$ は共有点を持つものが存在するときをいう。このとき $u \approx v$と表わす。

(2) 閉径路 $v : e_1 \xrightarrow{\alpha_1} e_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_m} e_{m+1} = e_1$に対し、$v_{e_i}$を v上で e_iから e_iまでの閉径路 $e_i \xrightarrow{\alpha_i} e_{i+1} \to \cdots \to e_m \xrightarrow{\alpha_n} e_1 \to \ldots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} e_i$を表わすものとする。

(3) $[u]$ の閉径路 $v : e_1 \xrightarrow{\alpha_1} e_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_m} e_{m+1} = e_1$が $[u]$ の **generating oriented cycle** とは次のいずれかの条件を満たしているものをいう。

(a) $[u]$ のすべての閉径路 wについて $w^2 = 0$ のとき、$e_i v e_i \neq 0$ となる i ($i = 1, \ldots, m$) について $e_i(\mathrm{Rad}\, R)e_i = K[v_{e_i}]$ を満たしている。

(b) $v^2 \neq 0$ かつ任意の i ($i = 1, \ldots, m$) について $e_i(\mathrm{Rad}\, R)e_i = K[v_{e_i}]$ を満たしている。

(4) 閉径路の集合 $\{v_1, \ldots, v_t\}$ が多元環 Rの閉径路の **semi-generators** であるとは次の条件を満たしているものを呼ぶ。

(a) $v_1, \ldots, v_t$の各々は generating oriented cycle。

(b) $v_i \not\approx v_j$ ($i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, t$).

(c) 任意の閉径路 vはある v_i ($1 \leq i \leq t$) があり $v \approx v_i$となる。

まず、semi-generators の存在が示せる。

命題 3.1. (1) 各閉径路の$\approx$による同値類の中に *generating oriented cycle* が存在する。

(2) *semi-generators* は存在する。

証明. uni-equivalent の各同値類に generating oriented cycle があることを示せばよい。$[v]$ を一つの同値類とする。vと uni-equivalent なすべての閉径路が定義 3.1(3a) の仮定を満たしていれば、$\dim_K e_i \,\mathrm{Rad}\, R e_i \leq 1$ より $e_i(\mathrm{Rad}\, R)e_i = K[v_{e_i}]$ が成立する。

そこで、ある $(u_1)_e{}^2$が零径路でないものがあると仮定する。u_1が generating oriented cycle でないなら、ある閉径路 u_2で $0 \neq (u_1)_{e_1} \in K[(u_2)_{e_1}] \cdot (u_2)^2_{e_1}$となり、乗法的基底と仮定したので、$(u_1)_{e_1} = l_1(u_2)^2_{e_1}$ とおける。

さらに u_2が generating oriented cycle でないなら、同様に $(u_2)_{e_2} = l_2(u_3)^2_{e_2}$とおける。

従って $({u_2)_{e_2}}^2 = t_1(u_2)_{e_2}s_1$とおくと

$$0 \neq (u_1)_{e_1} = l_1t_1(u_2)_{e_2}s_1 = l_1t_1l_2(u_3)^2s_1$$

となる。これが何回でも繰り返せると、s_1あるいはt_1が$\mathrm{Rad}\,R$ にあるので、任意の自然数 n に対して$\mathrm{Rad}^n\,R \neq 0$ となり矛盾する。従って generating oriented cycle が存在する。 □

注意 3.1. (1) $v_{e_1} : e_1 \to \cdots \to e_{n+1} = e_1$を generating oriented cycle とすると、定義より $e_1\,\mathrm{Rad}\,Re_1 = k[v_{e_1}]$ であるが、別の e_1から e_1への閉径路 $u : e_1 = e'_1 \to \cdots \to e'_{n+1} = e_1$を取ると、$u$ も零でなければ Rの基底で $k[v_{e_1}]$ の元より $u = v_{e_1}^n$となる自然数 n が存在する。

(2) $\{v_{e_1}, \dots v_{e_t}\}$ を閉径路の semi-generators とする。各 v_{e_i} $(1 \leq i \leq t)$ と同値な径路よりなる Rのクイバーの部分クイバーを $[v_{e_i}]$ とおくと、各 v_{e_i} $(1 \leq i \leq t)$ 間は一方通行の径路で結ばれている。

各 v_{e_i} $(1 \leq i \leq t)$ を点と考え、一方通行路を矢と考えるとこれによって出来るクイバーは閉径路を含まない、即ち木 (tree) となる。

例 1. クイバー $\underset{\alpha\circlearrowleft}{1\cdot} \xrightarrow{\gamma} \underset{\circlearrowleft\beta}{\cdot 2}$ に次の２つの関係式を考える。

$$(1)\ \gamma\alpha = \beta\gamma, \alpha^2 = \beta^2 = 0, \quad (2)\ \gamma\alpha = \beta\gamma = 0.$$

α, βはいずれの場合も semi-generators になっている。

しかし、(1) の場合はαの解消はβの解消にもなっているが、(2) の場合はαの解消とβの解消は独立である。

uni-equivalent で決めた同値類 $[v_1], [v_2]$ に対し、各同値類の中の閉径路 $u_1 \in [v_1], u_2 \in [v_2]$ とある径路 $\alpha : e_1 \to \cdots \to e_{n-1} \to e_n$ およびある自然数 t があり次の何れかが成立しているとき、$[v_1] \leftrightarrow [v_2]$ と表わす。(ただし、各 $[v]$ については無条件に $[v] \leftrightarrow [v]$ とする。)

$$(1)\ 0 \neq \alpha(u_1)_{e_1} = (u_2)_{e_n}{}^t\alpha, \quad (2)\ 0 \neq \alpha(u_1)_{e_1}{}^t = (u_2)_{e_n}\alpha.$$

$[v_1]$ と $[v_2]$ が **equivalent**($[v_1] \sim [v_2]$ と表わす) とは、ある uni-equivalent での同値類 $[u_1], \ldots, [u_n]$ があり $[v_1] = [u_1] \leftrightarrow [u_2] \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow [u_n] = [v_2]$ が成立しているときをいう。

閉径路の集合 $\{v_1, \ldots, v_t\}$ が閉径路の **generators** であるとは、次の条件を満たすときをいう。

(1) $v_1, \ldots, v_t$が上の equivalent に関する同値類の代表元。

(2) ある v_i $(1 \leq i \leq t)$ と equivalent な閉径路 v上の任意の点 e および v_i上の任意の点 gで次の条件を満たす。

(a) $eRg \cdot v_{i_g} \neq 0$ なら、あるαがあり $eRg = \alpha K[(v_i)_g]$ となる。

(b) $(v_i)_g eRg \neq 0$ なら、あるβがあり $gRe = K[(v_i)_g]\beta$となる。

互いの同値類間には閉径路がないことから次のことがわかる。

命題 3.2. 閉径路の *generators* は存在する。

3.3. 構成法. $\{v_1, \ldots, v_t\}$ を閉径路の generators とする。$v_1 : e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_n \to e_{n+1} = e_1$とおく。これに対しクイバー $A_\infty^\infty : \cdots \to e_1^{(0)} \to e_2^{(0)} \to \cdots \to e_n^{(0)} \to e_1^{(1)} \to \ldots$ に $g(e_i^{(j)}) = e_i^{(j+1)}$ $(j \in \mathbb{Z})$ と自己同型を決めて、ガロワ被覆 $F_{v_1} : A_\infty^\infty \to v_1$が決まる。$Q_{[v_1]}$ を $\{v | v \in [v_1]\}$ から作られる Q の full な部分クイバーとする。F_{v_1}は $F_{[v_1]} : \tilde{Q}_{[v_1]} \to Q_{[v_1]}$

なるガロワ被覆が自然に決定する。これは、$v \in [v_1]$ となる閉径路 v で v_1 上の一点を共有しているものを解消し、新しく作られた A_∞^∞ のクイバーに対して順次この操作を繰り返せばよい。

次に $[v_1]$ と $[v]$ を結んでいた一方通行の径路と $[v_i]$ 中のクイバーを $\tilde{Q}_{[v_1]}$ に持ち上げれば、v_1 が解消されたガロワ被覆 $F_{\{[v_1],[v]\}} : Q_{\{[v_1],[v]\}} \to Q$ が構成される。逐次構成法によって $[v_1] \leftrightarrow [v]$ である各 $[v]$ を順次持ち上げれば $[v_1]$ と equivalent である閉径路すべてが解消されたガロワ被覆 $F_1 : Q_1 \to Q$ が構成される。

逐次構成法を v_2 に適用して上記と同様の操作をすると v_2 が解消されたガロワ被覆 $F_2 : Q_2 \to Q$ が構成される。

これを t 回繰り返して generatros が解消したガロワ被覆 $F : \tilde{Q} \to Q$ が構成される。この $\tilde{Q}$ は勿論閉径路を含まない。

そこで、Q からこの被覆を得る為には次のようなホモトピー関係を入れればよい。

[ホモトピー関係]

$R = KQ/I$ とする。Q の walk 全体に対し以下のようなホモトピー関係 $\underset{H}{\sim}$ を Q に入れる。

$\alpha : e = e_1 \xrightarrow{\alpha_1} e_2 \to \cdots \to e_n \xrightarrow{\alpha_n} e_{n+1} = e$ を $e_1, \ldots, e_n$ が全て異なる閉径路、$\beta : f = f_1 \xrightarrow{\beta_1} f_2 \to \cdots \to f_n \xrightarrow{\beta_n} f_{m+1} = f$ を $f_1, \ldots, f_m$ が全て異なる閉径路とする。

(1) $f = e$ で $\alpha \in I$ あるいは $\beta \in I$ なら $\alpha \underset{H}{\sim} \beta$.

(2) $K[\alpha] = eRe, K[\beta] = fRf$ で $eRf \neq 0$ となっていたとする。

(a) $eRf = eRep$ $(p \in eRf)$ となる p があるとする (即ちある自然数 t があり、$\alpha^t p - p\beta \in I$)。このとき $\alpha^t p \underset{H}{\sim} p\beta$.

(b) $eRf = peRe$ $(p \in eRf)$ となる p があるとする。(即ち、ある自然数 t があり、

$\alpha^t p - p\beta \in I$)。このとき$\alpha p \underset{H}{\sim} p\beta^t$.

(3) (a) $\tau : y \to z$が Q の矢とすると$\tau^{-1}\tau \underset{H}{\sim} 1_y$, $\tau^{-1}\tau \underset{H}{\sim} 1_z$.

(b) $v \underset{H}{\sim} v'$ とするとき、合成可能なものに対し $wv \underset{H}{\sim} wv'$, $vu \underset{H}{\sim} v'u$.

これによって 1 点 $x \in Q$ を固定してホモトピー群 $\prod((Q, I), x)$ が定義できる。

命題 3.3. (1) ホモトピー群 $\prod((Q, I), x)$ の生成元は閉径路の *generators* である。

(2) $\prod((Q, I), x)$ をガロワ群にもつガロワ被覆 $F : K\tilde{Q}/\tilde{I} \to KQ/I$ で$\tilde{Q}$が閉径路を持たないものが存在する。

上記の命題のガロワ被覆 $F : K\tilde{Q}/\tilde{I} \to KQ/I$に対し、逐次構成法で出てくる有限クイバーを$T$、有限次多元環を KT/I_Tとする。Tは閉径路を持たないクイバーであるのでKT/I_Tのガロワ被覆は既知の範疇である。このガロワ被覆を作り、逐次構成法で上記の命題のガロワ被覆と合成すれば普遍被覆を得る。なぜなら、出てきた被覆のクイバーはどの有限部分クイバーも単連結であるからである。

この構成は述べなくてもよいかもしれないが、ホモトピーの生成元の具体的表示を与えるため、ここに記しておく。

3.4. separated radical の解消法. $R = KQ/I$とし Q は閉径路を持たないとする。このとき、Rが単連結である必要十分条件は Rが separated radical を有しないことである。([1] を参照。)

x からの径路が存在しない点からなる Q の部分クイバーを Q_x、$\alpha_1 : y_1 \to x, \ldots, \alpha_t : y_t \to x$ を x に来る全ての矢とする。Q_xを連結成分に分解したものを $Q_x = Q_x^{(1)} \cup \cdots \cup Q_x^{(s)}$

とする。連結成分 $Q_x^{(j)}$ $(1 \leq j \leq s)$ に対し、$Q_x^{(j)}$内にある点 $y_i (1 \leq i \leq s)$ へ向かう径路 $\beta : z \to \cdots \to y_i$で矢$\alpha_i : y_i \to x (1 \leq i \leq s)$ との合成$\alpha_i\beta$が Iに入らないものを考える。その径路の始点 zの集合をRad $Q_x^{(j)}$とおく。

Rが Q の点 x で separated radical を有するとは、全てのRad $Q_x^{(j)}$ $(1 \leq j \leq s)$ が連結となるときをいう。

この「単連結」とは Auslander-Reiten クイバーの基本群が零になるという意味である。

3.5. ホモトピー. 次のようにホモトピー関係$\underset{H}{\sim}$を定義する。

(1) 2つの径路 $x = a_1 \xrightarrow{\alpha_1} a_2 \to \ldots \xrightarrow{\alpha_n} a_{n+1} = y,\ x = b_1 \xrightarrow{\beta_1} b_2 \to \ldots \xrightarrow{\beta_m} b_{m+1} = y$で $\alpha_n \ldots \alpha_1 \notin I,\ \beta_m \ldots \beta_1 \notin I$ なら$\alpha_n \ldots \alpha_1 \underset{H}{\sim} \beta_m \ldots \beta_1$.

(2) $\tau : x \to y$を Q の矢とすると$\tau^{-1}\tau \underset{H}{\sim} 1_y,\ \tau^{-1}\tau \underset{H}{\sim} 1_z$.

(3) $v \underset{H}{\sim} v'$ とするとき、合成可能なものに対し $wv \underset{H}{\sim} wv', vu \underset{H}{\sim} v'u$.

これによって1点 $x \in Q$ を固定してホモトピー群 $\prod((Q, I), x)$ が定義できる。

命題 3.4. (1) 円周に同相な部分から *non-separated radical* を持つ点を取り、この円周を与える (この点からこの点自身への) *walk* を考える。このような *walk* 全体がホモトピー群 $\prod((Q, I), x)$ の生成元である。

(2) $\prod((Q, I), x)$ をガロワ群にもつガロワ被覆 $F : K\tilde{Q}/\tilde{I} \to KQ/I$ で$\tilde{Q}$が閉径路を持たず全ての点が *separated radical* になっているものが存在する。即ち Fは普遍被覆を与える。

命題 3.5. $R = KQ/I$の普遍被覆は、閉径路の解消とこれによって作られるある有限クイバーの *non-separated radical* の解消の逐次構成によって得られ、そのガロワ群の生成元は各々の生成元の和集合である。

参考文献

1. R. Bautisa, F.Larión, and L.Salmerón, *On simply connected algebras*, J. London Math. Soc. **27(2)** (1983), 212–220.
2. K. Bongartz and P. Gabriel, *Covering space in representation theory*, Invent. Math. **65** (1982), 331–378.
3. P. Gabriel, *The universal cover of a representation-finite algebra*, Representations of algebras, Lecture Notes in Mathematics, vol. 903, Springer-Verlag, 1981, pp. 68–105.
4. Edward L. Green, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), no. 1, 297–310.
5. R. Martínez-Villa and J. A. De La Peña, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 277–292.

山梨大学教育学部数学教室
〒400 山梨県甲府市武田 4-4-37
E-mail address: sato@grape.kkb.yamanashi.yamanashi.ac.jp